

Vorschläge zur Unterrichtsdurchführung

Anhand dieser Einheit werden die Begriffe Drehmoment und Schwerpunkt eingeführt und die Gesetze für das Drehmomentgleichgewicht (Hebelgesetze) formuliert.

Vorbereitung des Materials

Das *Armmodell* wird zweckmäßigerweise aus einem Balsaholzbrettchen entsprechend der Vorlage ausgeschnitten. Bei G wird ein Loch gebohrt und eine Metallhülse als stabiles Gelenk eingeklebt. Auf die Vorderseite wird die Papiervorlage geklebt.

In ein größeres Brett, das aufrecht stehend fixiert wird, wird ein dem Innendurchmesser der Hülse entsprechender Metallstab als Achse befestigt.

Für die *Bestimmung des Schwerpunkts* anhand eines Armmodells wird ein Brett mit den Maßen von etwa 1,5 cm Dicke, 6 cm Höhe und der Länge der Unterarmvorlage in z.B. 14 gleich große Teile zersägt. Das Brett soll eine Nut haben, damit die Teile auf eine flache, leichte Leiste aufgesteckt werden können (vgl. die Bilder in Schritt 6). Auf die Vorderseite klebt man die entsprechend der abgesägten Brettstücke zurecht geschnittenen Teile der kopierten Vorlage.

Die *Kopiervorlage* befindet sich am Ende dieses Textes über die Unterrichtsvorschläge.

1: Einführung

Man zeigt den Schülerinnen und Schülern ein Schnittbild eines menschlichen Armes (nach Bild 1 der Lehrerinformation) oder, falls vorhanden, ein Modell aus der Biologiesammlung, damit sie eine Vorstellung über den Aufbau eines realen, menschlichen Armes bekommen. Gleichzeitig kann man auch schon eine erste Einführung in die Funktionen der einzelnen Muskeln und Knochen geben:

Der Bewegungsapparat des Menschen mit den zugehörigen Muskeln ist hochentwickelt. Sollen die Muskeln verschiedene Aufgaben erfüllen, liegt im Prinzip eher eine Kombination von unabhängigen Einzelmuskeln vor, in anderen Fällen herrscht eine mehr automatische Gruppentätigkeit der Muskeln vor. Die Muskeln von Arm, Hand und Finger müssen z. B. unter der Kontrolle des Sehorgans fähig sein, voneinander unabhängige Bewegungen auszuführen. Dabei müssen die Muskeln sowohl erhebliche Kräfte entfalten, als auch feine Bewegungsspiele durchführen können. Um diese Funktionen gewährleisten zu können, müssen Muskeln, Knochen und Gelenke aufeinander abgestimmt sein, wobei sie bestimmten Konstruktionsprinzipien unterliegen. Trotz der einschränkenden Bedingungen hatte die Entwicklung im Laufe der Evolution eine gewisse Freiheit, aus Aufbaumöglichkeiten auszuwählen. Andere Muskel- und Knochenanordnungen am Arm, die die gleichen Bewegungen mit dem notwendigen Kraftaufwand verrichten können, sind daher denkbar. Bessere Anordnungen als die von der Natur geschaffenen, sind wahrscheinlich auch für Fachleute nicht einfach zu finden. Die Schülerinnen und Schüler werden im Verlauf des Unterrichts die Perfektion, Nützlichkeit und Ökonomie der Konstruktion des Armes kennenlernen.

2: Einführung des einseitigen Hebels

Als starke Vereinfachung betrachtet man einen Arm, bei dem die Muskelkräfte, die die Last halten, durch eine einzige, nach oben ziehende Kraft F_M dargestellt werden (Bild 1). Das Modell wird am günstigsten aus Balsaholz gebaut (siehe „Vorbereitung des Materials“), damit kann man zunächst zur Vereinfachung das sehr kleine Eigengewicht vernachlässigen.

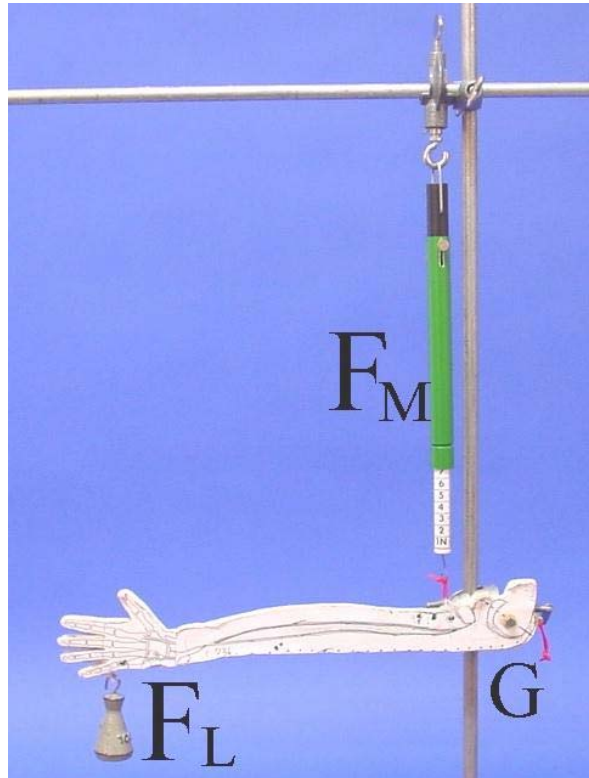


Bild 1: vereinfachtes Armmodell als Hebel

Der einseitige Hebel hat z.B. einen Kraft- bzw. Lastarm von $l_M = 2,5 \text{ cm}$ bzw. $l_L = 25 \text{ cm}$. Der Bizeps wird durch eine eingehängte Feder dargestellt. Das angehängte Gewicht simuliert die Last F_L . Der Drehpunkt ist am Rahmen fixiert.

Nun sollen die Schülerinnen und Schüler die beiden Kräfte miteinander vergleichen mit dem Ergebnis:

Die Last F_L dreht den Unterarm gegen den Uhrzeigersinn. Die Kraft F_M hingegen dreht den Unterarm im Uhrzeigersinn. Die Kraft F_M ist viel größer als die Kraft F_L . Aber die Angriffspunkte liegen unterschiedlich weit von der Drehachse entfernt. Zu der größeren Kraft gehört der kleinere Abstand und umgekehrt. Für die Wirkung ist also nicht nur der Betrag der Kraft sondern auch der Abstand des Angriffspunktes von der Drehachse von Bedeutung.

3. Drehmoment und Drehmomentgleichgewicht – das Hebelgesetz (quantitativ)

Als nächstes wird das Problem gestellt, wann der Arm im Gleichgewicht ist. Es werden einige Messungen mit verschiedenen Lasten durchgeführt, um daraus die Beziehungen zwischen den Kräften und Abständen für den Gleichgewichtszustand zu finden. (Die obere Federanhängung wird je nach Last so verschoben, dass der Unterarm in der horizontalen Lage bleibt).

Wenn im Modell z. B. der Lastarm 10 mal größer als der Muskelarm gewählt wird, ist es für die Schülerinnen und Schüler leicht festzustellen, dass beim Gleichgewicht Last mal Lastarm = Kraft mal Kraftarm ($F_M \cdot l_M = F_P \cdot l_P$) ist. Selbstverständlich müssen für einen quantitativen Vergleich die Lastgewichte in dieselbe Einheit wie die vom Kraftmesser angezeigten Werte umgewandelt werden.

Damit ist klar, dass das Produkt aus Kraft und Abstand von der Drehachse die hier für das Gleichgewicht relevante Größe ist. Wegen ihrer Bedeutung bekommt sie einen eigenen Namen: **Drehmoment**

Jetzt kann mit Hilfe dieses Begriffs die Gleichgewichtsbedingung formuliert werden:

Im Gleichgewicht ist das linksdrehenden Drehmoment gleich dem rechtsdrehenden Drehmoment.

An dieser Stelle wird man die übliche Bezeichnung „einseitiger Hebel“ für die Anordnung einführen.

Nimmt man eine zweite Lastkraft mit dazu und betrachtet weitere, „herkömmliche“ Beispiele zum einseitigen Hebel, so lässt sich diese Aussage folgendermaßen verallgemeinern:

Im Gleichgewicht ist die Summe der linksdrehenden Drehmomente gleich der Summe der rechtsdrehenden Drehmomente.

Weichen die Messergebnisse wegen der Reibung zu stark von den idealen Werten ab, geht man nach der qualitativen Einführung zum gut gelagerten Hebel oder der Drehmomentscheibe über.

4. Der zweiseitige Hebel

Als nächstes betrachtet man die Bedingungen für das Gleichgewicht, wenn die Trizepskraft nach oben zieht und die Lastkraft ebenfalls nach oben zieht (Bild 2). Dies ist z.B. dann der Fall, wenn man an einem Seil nach unten zieht. Man gibt z.B. $L_M = 2$ cm (Kraftarm des Trizeps) und $L_L = 25$ cm (Lastarm) vor, was etwa der Realität entspricht. Außerdem lässt man die Kraft senkrecht nach oben ziehen.

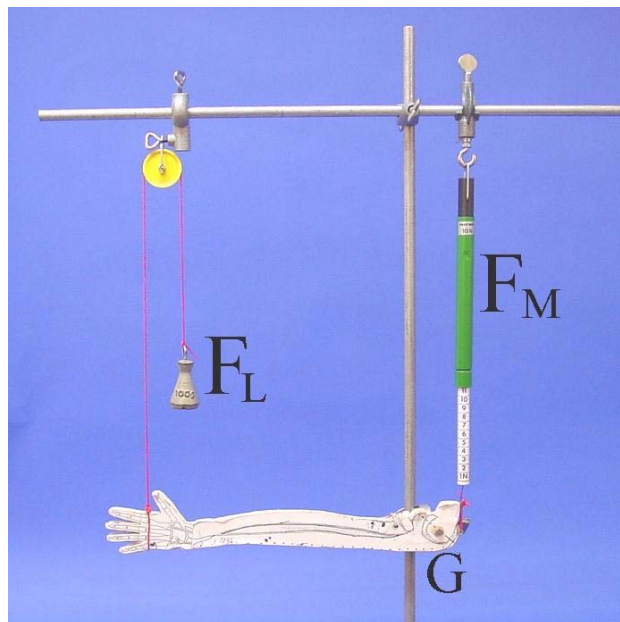


Bild 2: Gleichgewicht bei Betrachtung der Trizepskraft.

Einige Messungen mit verschiedenen Lasten führen zu dem Ergebnis, dass das Hebelgesetz auch beim zweiseitigen Hebel gilt und die notwendige größere Kraft im Vergleich zu dem Versuch mit dem Trizeps von der ungünstigeren Länge des zugehörigen Hebelarms herkommt.

Das Hebelgesetz wird anhand der üblichen Beispiele nun weiter geübt.

5. Allgemeine Fassung des Drehmoments (optional)

Man betrachtet nun den Fall, dass der Arm etwas gestreckt ist. Die vom Muskel ausgeübte Kraft zieht dann schräg nach oben (Bild 3). Die Schüler werden feststellen, dass die notwendige Kraft in diesem Fall zur Erhaltung eines Gleichgewichts bei gleicher Last größer sein muss. Das heißt, die maximale Wirkung wird erreicht, wenn die Kraft senkrecht nach oben gerichtet ist.

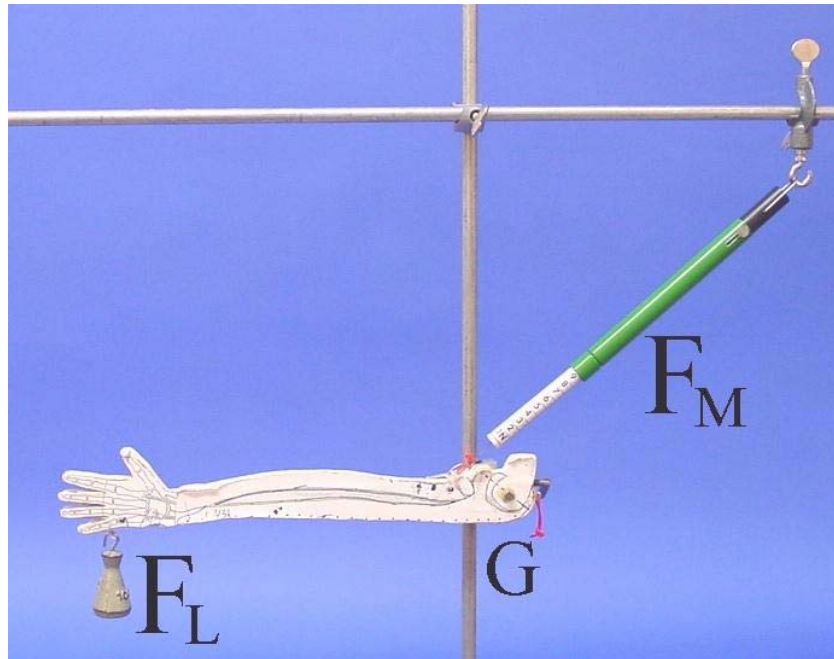


Bild 3: Schräg nach oben ziehende Muskelkraft beim leicht gestreckten Arm: bei gleicher Last muss der Muskel eine größere Kraft ausüben.

Falls es als zweckmäßig angesehen wird, kann der Betrag des jetzt wirkenden Drehmomentes über das Produkt aus senkrechter Kraftkomponente mit dem Kraftarm definiert werden: $F_{\perp} \cdot L$ oder als Produkt aus Kraftbetrag mit dem Abstand des Lotes von der Drehachse auf die Wirkungslinie.

6. Der Schwerpunkt

Für den zweiten Teil der Unterrichtsvorschläge zum Drehmoment, der Belastung der Wirbelsäule wird der Schwerpunkt benötigt.

Soll der Schwerpunkt im Kontext des Armmodells eingeführt werden, kann folgendermaßen vorgegangen werden: Die Schülerinnen und Schüler werden darauf hingewiesen, dass zur Vereinfachung das Armmodell aus einem sehr leichten Material hergestellt wurde. Dadurch konnte vernachlässigt werden, dass der Unterarm schon aufgrund seines Eigengewichts nach unten gedreht wird. Wie hat nun die Gleichgewichtsbedingung auszusehen, wenn man das Eigengewicht berücksichtigt?

Wegen der kontinuierlichen aber über die Armlänge unterschiedliche Verteilung der Masse ist eine einfache Antwort nicht zu erwarten. Zur Vereinfachung benutzen wir nun ein Armmodell mit einer kontinuierlichen aber gleichmäßigen Massenverteilung. Es besteht aus einer flachen, leichten Leiste, auf die mit einer Nut versehenen Brettstücke aufgesteckt werden können. (Bild 4).

Bei 14 Teilen hat man die Wirkung von 14 Drehmomente zu berücksichtigen. Gibt es eine Möglichkeit, die Wirkung der 14 Drehmomente durch die eines einzigen zu ersetzen, das relativ einfach bestimmt werden kann?

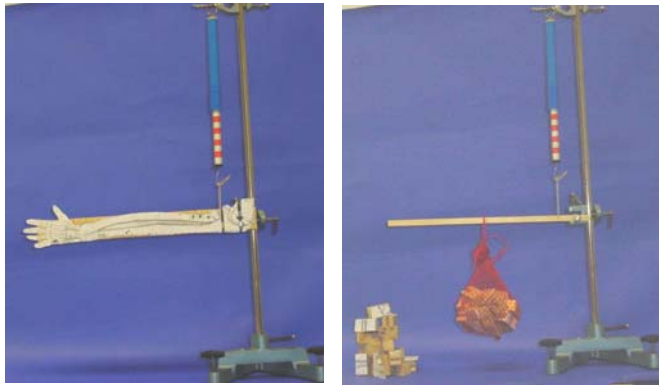


Bild 4: a) Das Armmodell ist unterteilt in 14 Teile gleiche Teile.
b) Werden alle Teile bei $L/2$ angehängt, ergibt sich das gleiche Drehmoment.

Man kann die Vorgabe machen, dass das Ersatzdrehmoment so konstruiert werden soll, dass die Gesamtmasse in einem noch zu bestimmenden sehr kleinen, praktisch punktförmigen Volumen vereinigt ist. Das Problem besteht dann darin, diesen Punkt bei gegebener Gesamtmasse und Drehachse zu bestimmen.

Man kann die Schülerinnen und Schüler intuitive Lösungsansätze vermuten lassen, ggf. als Denkansatz die dem jungen Gauß nachgesagte Lösung für die Summe der ersten 50 natürlichen Zahlen nahe legen: Die Summe der beiden Drehmomente für die beiden Randstücke ist z.B. (a ist die Breite eines der schmalen Stücke, m seine Masse):

$$mg \cdot a/2 + mg \cdot (L-a/2) = 2m \cdot g \cdot L/2,$$

also ein Drehmoment, das man sich entstanden denken kann durch die Summe der beiden Gewichtskräfte, wobei diese resultierende Kraft aber in der Mitte angreift.

Jedes weitere von beiden Seiten her innen anschließende Paar liefert das selbe Ergebnis. Zusammengefasst können wir in unserem Beispiel die Wirkung der vielen einzelnen Drehmomente der gleichmäßigen Stange durch ein einziges ersetzen. Dies ist so bestimmt, dass die gesamte Masse in einem Punkt vereinigt vorgestellt wird, der in der Mitte liegt. Das dadurch entstehende Drehmoment dreht zusätzlich zu dem Drehmoment der Last.

Wie kann der Schwerpunkt bei komplizierterer Verteilung der Masse bestimmt werden? Wenn man sich als Gedankenexperiment vorstellt, dass die Masse eines Körpers in einem Punkt zusammengezogen ist (ansonsten bleibt der Körper als gewichtslose Hülle bestehen), dann darf er sich nicht drehen, wenn er in diesem Punkt unterstützt wird, denn dann kann es keine Drehmomente aufgrund der Schwerkraft geben. Bei jedem Körper lässt sich ein solcher Punkt finden, auch wenn der Körper unsymmetrisch ist und die Masse ungleich verteilt ist. Diesen Punkt nennt man **Schwerpunkt** (oder **Massenmittelpunkt**), weil man sich die gesamte Masse des Körpers in ihm vereinigt denkt. Wenn man den Körper in diesem Punkt unterstützt, gibt es keinen Kraftarm und damit bleibt er im Ruhezustand und beginnt nicht sich zu drehen.

Bei ebenen, flächenhaften Körpern kann man auf diese Weise den Schwerpunkt bestimmen und damit dann das Drehmoment bezüglich einer gegebenen Achse angeben:

$$M = m_{\text{ges}} \cdot a_S,$$

wobei m_{ges} die gesamte Masse und a_S der kürzeste Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse ist.

Wie kann man den Schwerpunkt eines räumlich ausgedehnten Körpers bestimmen? Offensicht muss folgendes gelten: Hängt man den Körper frei drehbar an irgendeinem seiner Oberflächenpunkte auf, dann dreht er sich solange, bis sich der Schwerpunkt senkrecht unter dem Aufhängepunkt befindet. Dann gibt es kein Drehmoment mehr. Damit ist ein Strahl festgelegt, auf dem sich der Schwerpunkt befindet. Ein zweiter Aufhängepunkt liefert einen zweiten Strahl und der Schnittpunkt mit dem ersten Strahl legt den Schwerpunkt fest.

Bei einem flächigen Körper wird demonstriert, dass beide Verfahren das gleiche Ergebnis liefern.

Versuchsanordnung zur Bestimmung des Schwerpunktlots:
Vor allem für die Behandlung der Standfestigkeit (vgl. die Unterrichtseinheit zur Wirbelsäule) ist die folgende Versuchsanordnung nützlich. Ein gleichseitiges Dreieck wird symmetrisch durch drei Druckfederkraftmesser unterstützt (Bild 5). Die drei Kraftmesser zeigen genau dann gleiche Werte an, wenn das Lot des Schwerpunktes eines auf die dreieckige Platte gestellten Körpers durch den Mittelpunkt der Platte geht (dann gibt es kein Drehmoment). Auf diese Weise kann sehr schnell das Lot des Schwerpunktes gefunden werden.



Bild 5: Bestimmung des Schwerpunktlots

