

Das plancksche Strahlungsgesetz

Historisch

1642 - 1727: Newton beschreibt Licht als Strom von Teilchen

1800 – 1900: Licht als Welle

um 1900: Rätsel um die "Hohlraumstrahlung"

Historisch

um 1900: Rätsel um die "Hohlraumstrahlung"

1865 veröffentlichte J. Tyndall Ergebnisse über die Strahlung eines heißen Platindrahtes.
Das Verhältnis der Gesamtstrahlungsemission bei 1200 °C und bei 525 °C betrug 11,7

1879 erkannte J. Stefan, dass die absoluten Temperaturen in der 4ten Potenz im gleichen Verhältnis stehen: $(1473 \text{ K})^4 / (798 \text{ K})^4 = 11,6$

1884 fand L. Boltzmann einen theoretischen Zusammenhang zu thermodynamischen Betrachtungen zum Strahlungsdruck.

Das Gesetz für die gesamte abgestrahlte Leistung eines idealen "schwarzen Strahlers" ist das

$$\text{Stefan-Boltzmann-Gesetz: } P = \sigma \cdot A \cdot T^4$$

mit

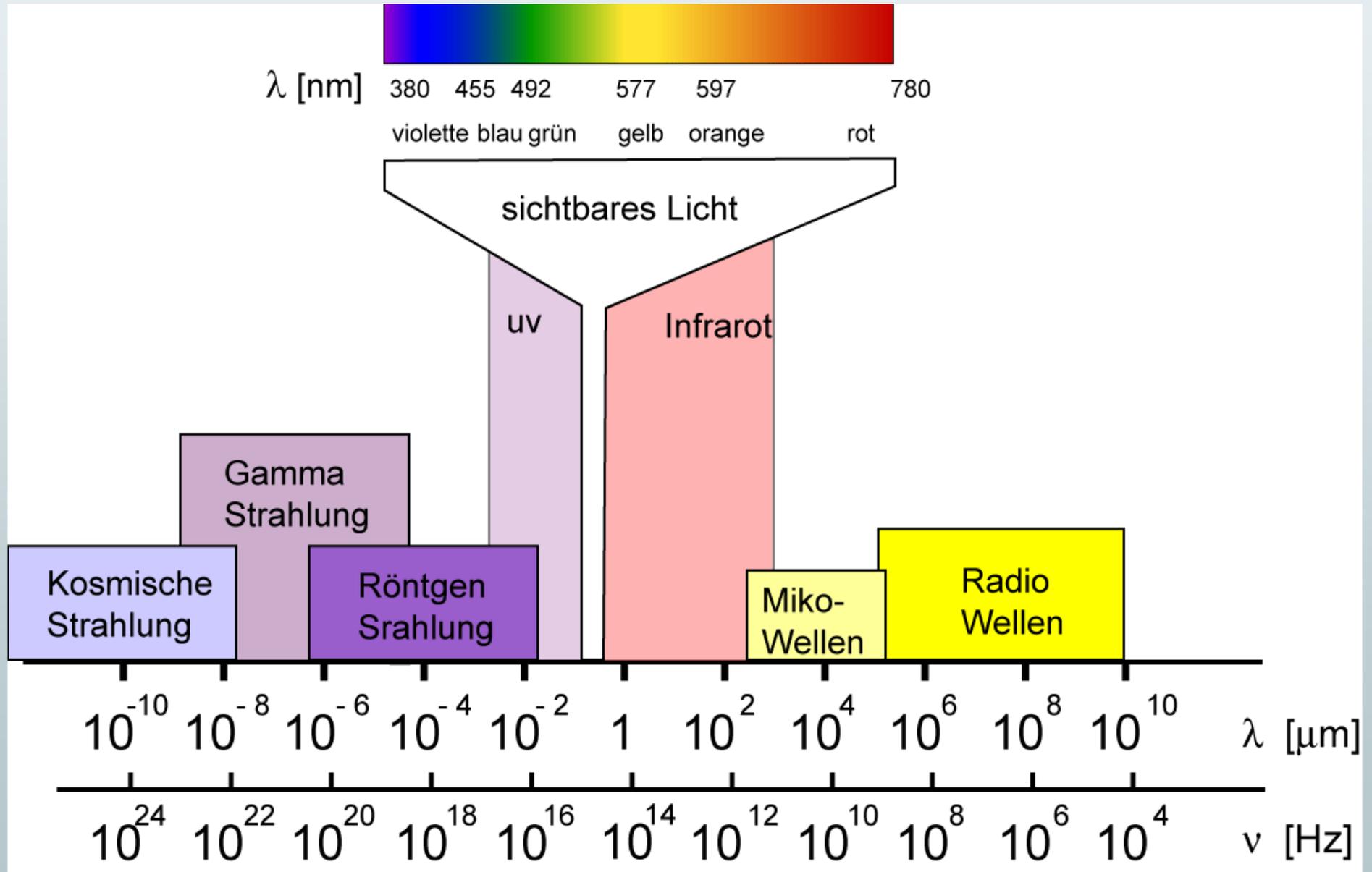
$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^4$$

Experimentelle Grundlagen

- Heiße Körper glühen. Bei 600°C - 700°C glüht Eisen dunkelrot, bei 1300°C hell kirschrot.
- Eine Kohlefadenlampe verändert ihre Farbe und Helligkeit mit der Stromstärke / Temperatur.
- Weißes Licht lässt sich in Spektralfarben zerlegen.
- Die Strahlung eines Leslie-Würfels lässt sich mit einem Strahlungsthermometer nachweisen. – Die Seiten strahlen unterschiedlich!

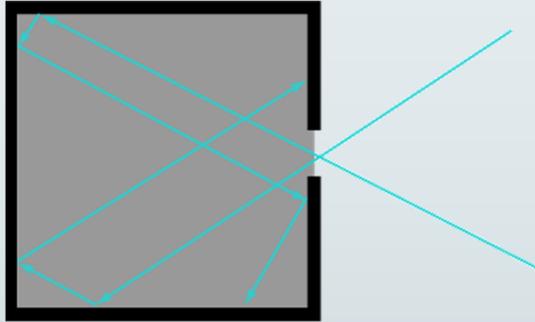
Das plancksche Strahlungsgesetz

Exkurs: Das elektromagnetische Spektrum



Das plancksche Strahlungsgesetz

Hohlraumstrahlung



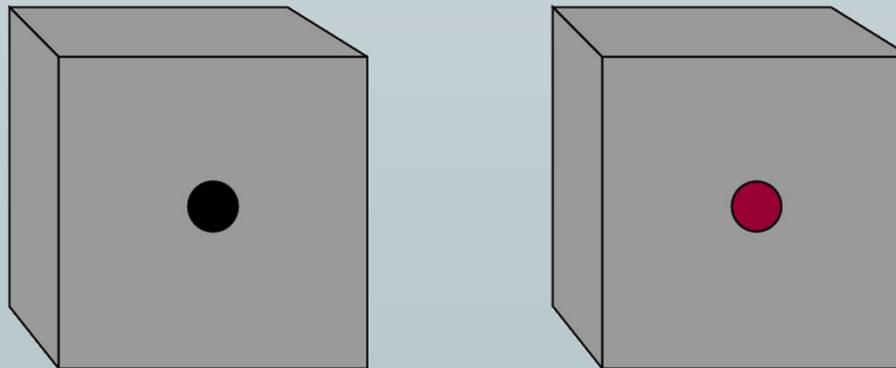
Licht fällt durch die schmale Öffnung in einen Hohlraum und wird an den Wänden mehrfach (geschwächt) reflektiert bis er ganz absorbiert ist.

⇒ Die Öffnung erscheint schwarz.

(Hinweis: Auch die Pupille des Auges erscheint normalerweise schwarz. Nur im Blitzlicht wird das Innere deutlich erhellt und der rote Hintergrund des Augapfels wird sichtbar – rot)

Absorption und Emission

Der Hohlraum sendet aber auch Strahlung aus. Sie ist stark von der Temperatur des Hohlraums abhängig und wird erst oberhalb von 600 °C sichtbar.



Das plancksche Strahlungsgesetz

Glühende Körper

Glühfarben von Werkzeugstahl

Glühfarbe	Dunkelbraun	Braunrot	Dunkelrot	Dunkelkirschrot	Kirschrot	Hellkirschrot	Hellrot	gut Hellrot	Gelbrot	Hellgelbrot	Gelb	Hellgelb	Gelbweiß
Temperatur ϑ in °C	550	630	680	740	780	810	850	900	950	1000	1100	1200	1300

Absorption und Emission

Absorptionsgrad und Emissionsgrad setzen die wellenlängenabhängige Absorption und Emission in Bezug zu einem idealen "schwarzen Körper" / Hohlraumstrahler.

$$\text{Absorptionsgrad } \alpha = \frac{\text{absorbierte Strahlungsenergie}}{\text{eingefallene Strahlungsenergie}} = \frac{I_{\text{abs.}}}{I_{\text{einf.}}}$$

$$\text{Emissions } \varepsilon = \frac{\text{abgestrahlte Energie}}{\text{abgestrahlte Energie eines schw. Strahlers}} = \frac{I_{\text{Körper}}}{I_{\text{Schwarz}}}$$

Ein "schwarzer Körper" absorbiert alle auftreffende Strahlung. Deshalb gilt:
Der Absorptionsgrad des "schwarzen Körpers" ist 1 (bzw. 100 %).

Absorption und Emission - Kirchhoffsches Strahlungsgesetz

Absorptionsgrad und Emissionsgrad eines Körpers sind bei Temperaturstrahlung immer gleich:

$$\alpha = \varepsilon$$

Emissionsgrade (sind wellenlängenabhängig)

Ruß hat fast den Emissionsgrad 1
(insbesondere auch im sichtbaren Bereich den Absorptionsgrad 1)

Der menschliche Körper ist im Infrarotbereich fast ein "schwarzer Körper".

Emissionsgrade

Oberfläche	Temp. in Grad C	Emissionsgrad
Aluminium (poliert)	20	0,02 – 0,04
Eisen (poliert)	100	0,20
Eisen (angerostet)	20	0,65
Beton	20	0,94
Glas	20	0,88
Holz	20	0,90
Kunststoff	20	0,9
Wasser	20	0,9
Lacke	100	0,92 – 0,97

Stefan-Boltzmann-Gesetz

allg.: Stefan-Boltzmann-Gesetz: $P = \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot T^4$

mit $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$

- A) Vergleichen Sie die Gesamtstrahlung eines Körpers bei 0 °C und 100 °C .
- B) Wie viel Energie strahlt die Seite eines Stahlwürfels (Seitenlänge 10 cm) bei einer Temperatur von 400 °C ($\varepsilon = 0,97$) in einer Sekunde ab?

Stefan-Boltzmann-Gesetz

allg.: Stefan-Boltzmann-Gesetz: $P = \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot T^4$

mit $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^4$

A) Vergleichen Sie die Gesamtstrahlung eines Körpers bei 0 °C und 100 °C .

Das 3,5-fache.

B) Wie viel Energie strahlt die Seite eines Stahlwürfels (Seitenlänge 10 cm) bei einer Temperatur von 400 °C ($\varepsilon = 0,97$) in einer Sekunde ab?

110 Ws

Die plancksche Strahlungsformel

Annahmen Plancks:

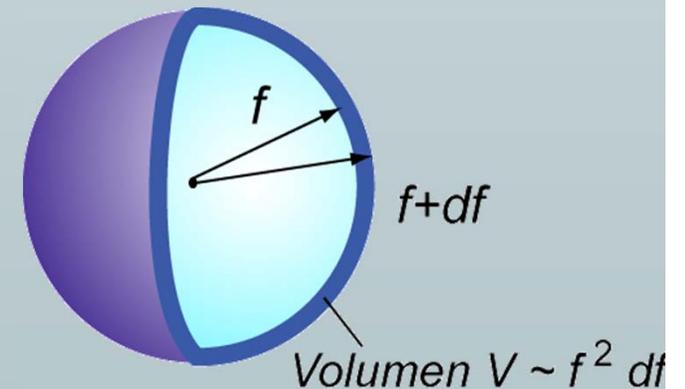
- Oszillatoren (Atome bzw. Moleküle in den Wänden des Hohlraums) emittieren und absorbieren Energie aus dem Strahlungsfeld
- Absorbiert und emittiert werden aber nur diskrete Energiewerte (dies war die eigentliche, revolutionär neue Annahme)
- Ohne Aufnahme oder Abgabe von Energie bleiben die Oszillatoren in ihrem Quantenzustand
- Die Zahl der möglichen Oszillatorzustände mit Frequenzen zwischen f und $f+df$ ist proportional zu f^2df

$$E_n = n \cdot h \cdot f;$$

mit: $n = 1, 2, \dots$

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

Vorstellungshilfe:



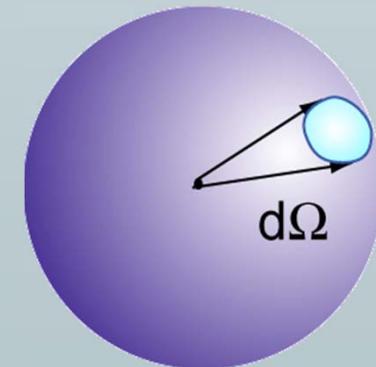
Die plancksche Strahlungsformel

Die spektrale Energiestromdichte pro Raumwinkelement :

$$S_f = \frac{2hf^3}{c_0^2} \cdot \frac{1}{e^{hf/kT} - 1}$$

Energie, die im Frequenzbereich df um f pro Zeiteinheit und Fläche in die Raumwinkeleinheit gestrahlt wird.

Vollwinkel: $\frac{4\pi \cdot r^2}{r^2} = 4\pi$



Die plancksche Strahlungsformel für Wellenlängen

Die spektrale Energiestromdichte pro Raumwinkelement :

$$S_f \cdot df = \frac{2hf^3}{c_0^2} \cdot \frac{1}{e^{hf/kT} - 1} \cdot df$$

$$S_\lambda \cdot d\lambda = S_f \cdot \frac{df}{d\lambda} d\lambda$$

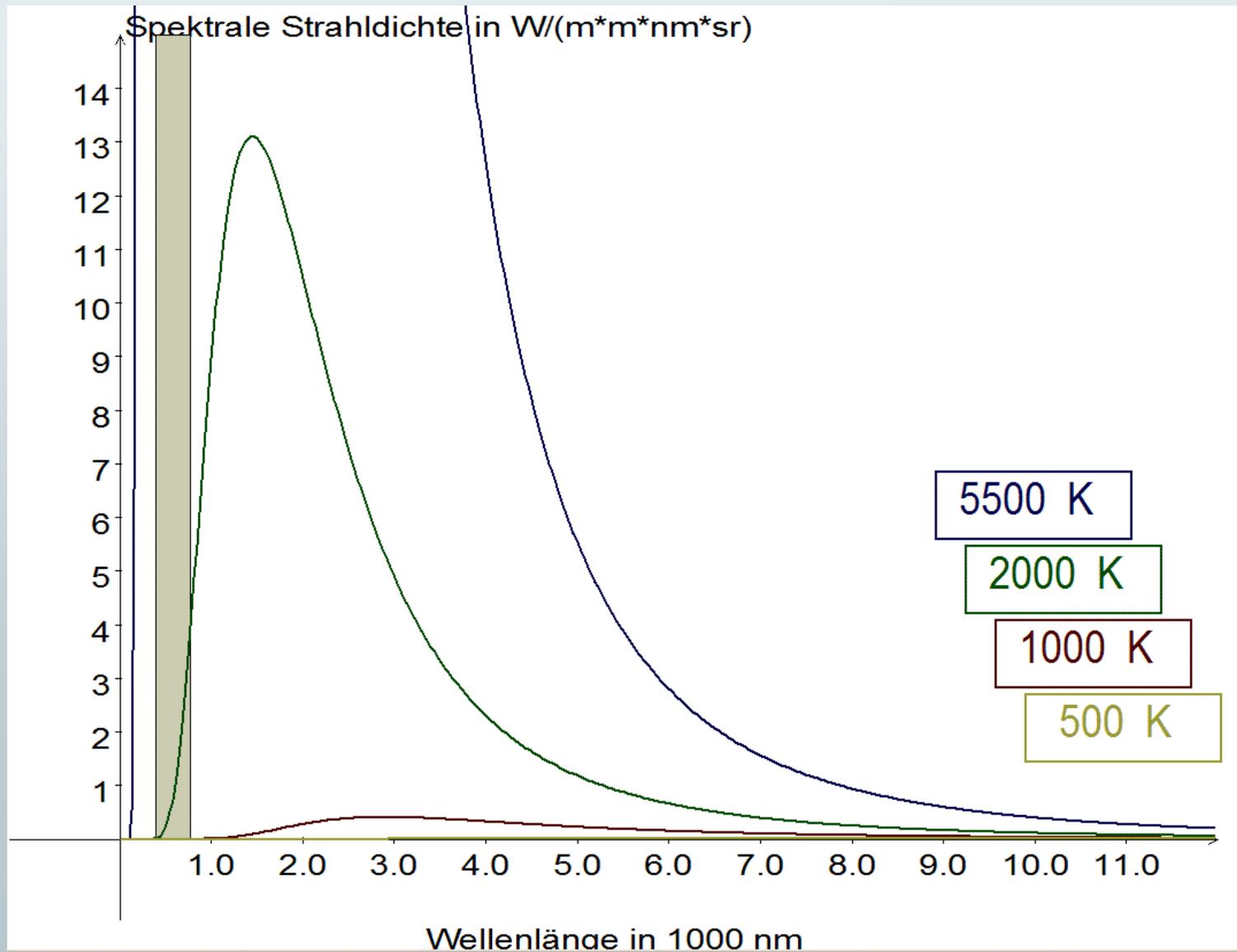
Energie, die im Wellenlängenbereich $d\lambda$ um λ pro Zeiteinheit und Fläche in die Raumwinkeleinheit gestrahlt wird.

$$S_\lambda = \frac{2hc_0^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc_0/\lambda kT} - 1}$$

Das plancksche Strahlungsgesetz

Die plancksche Strahlungsformel für Wellenlängen

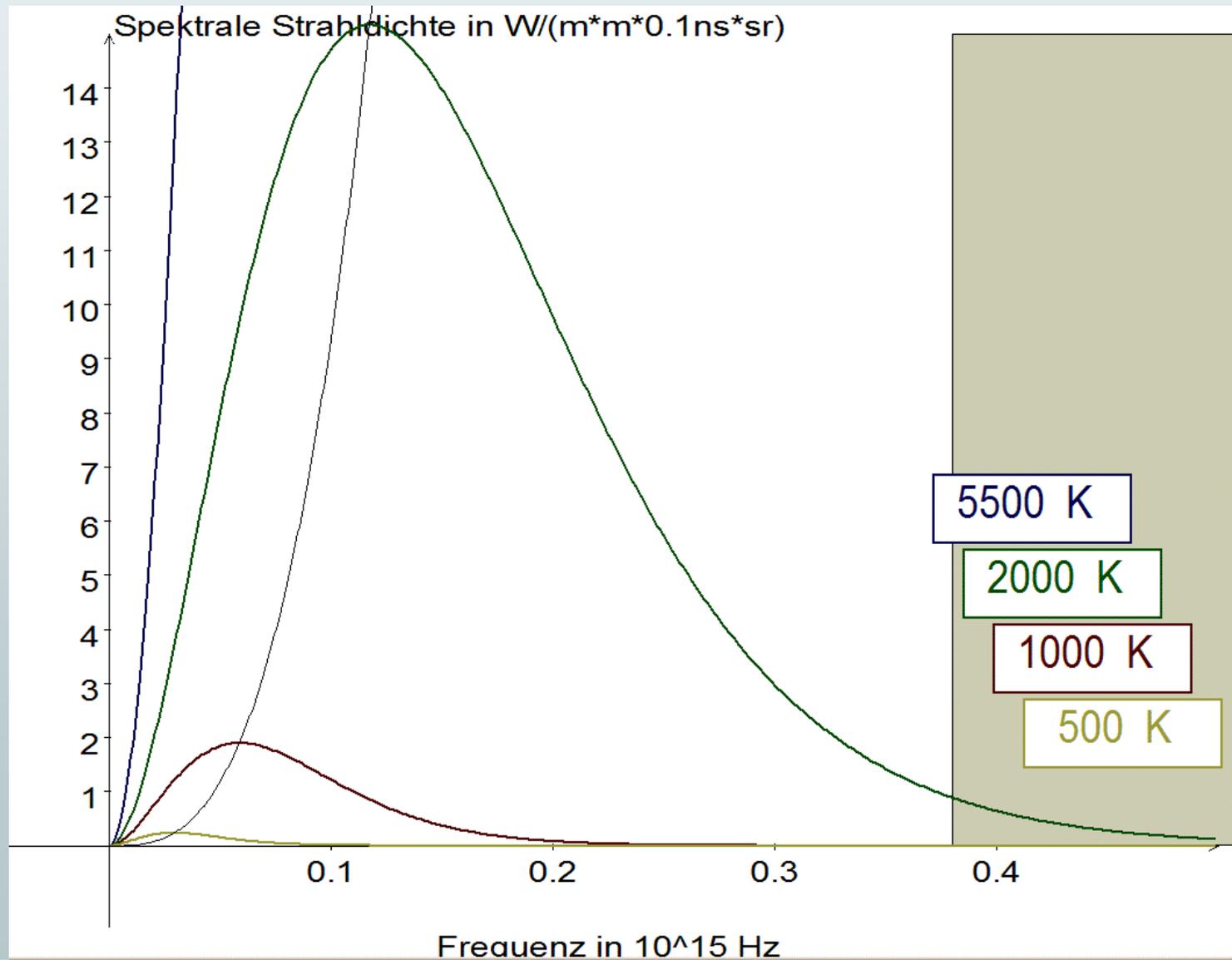
$$S_{\lambda} = \frac{2hc_0^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc_0/\lambda kT} - 1}$$



Das plancksche Strahlungsgesetz

Die plancksche Strahlungsformel

$$S_f = \frac{2hf^3}{c_0^2} \cdot \frac{1}{e^{hf/kT} - 1}$$



Das plancksche Strahlungsgesetz

siehe Computerprogramm:

www.physikonline.net

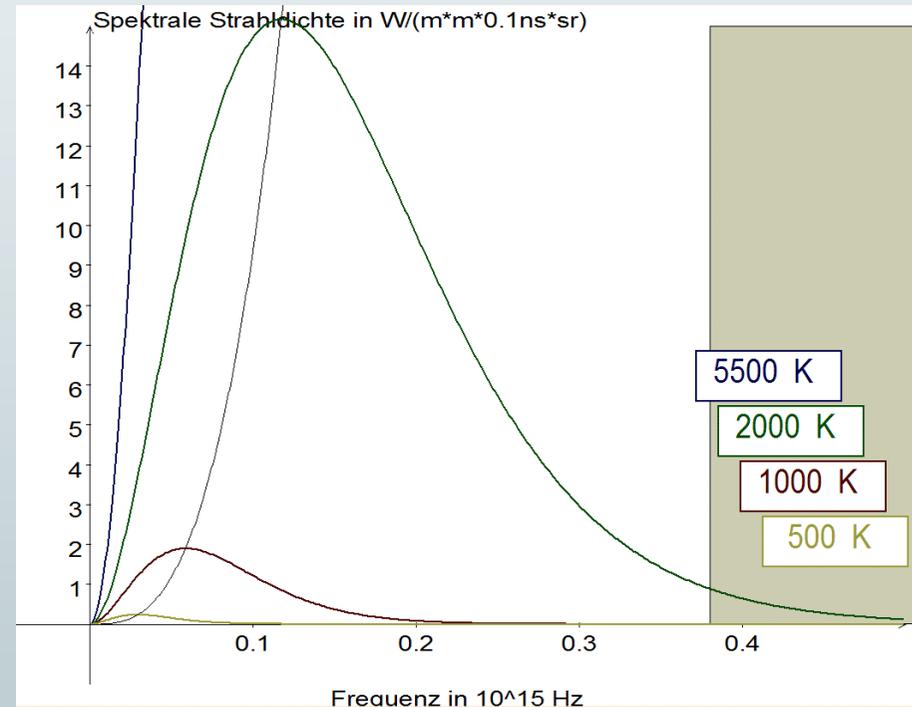
bzw.

auf der Seite mit Begleitmaterial zur Vorlesung

Das plancksche Strahlungsgesetz

Die Plancksche Strahlungsformel und Stefan-Boltzmann-Gesetz

$$S_f = \frac{2hf^3}{c_0^2} \cdot \frac{1}{e^{hf/kT} - 1}$$

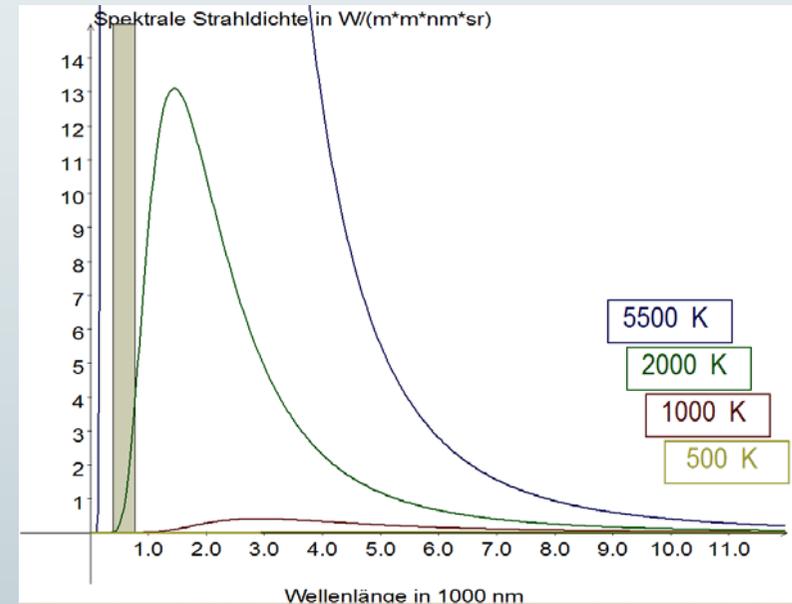


Die Gesamtenergie, und damit das Stefan-Boltzmann-Gesetz ergibt sich durch Integration über alle Frequenzen und den vollen Raumwinkel:

$$P = \sigma \cdot A \cdot T^4$$

Das plancksche Strahlungsgesetz

Die Plancksche Strahlungsformel und Wiensches Verschiebungsgesetz



Die Wellenlänge λ_{\max} , bei der die Intensität der emittierten Strahlung ein Maximum hat verschiebt sich mit steigender Temperatur zu kürzeren Wellenlängen.

$$\lambda_m \cdot T = konst = 0,2898 \text{ cm} \cdot \text{K}$$

Aufgaben zum planckschen Strahlungsgesetz

- Die durchschnittliche Hauttemperatur des Menschen liegt bei ca. 33°C . Bei welcher Wellenlänge liegt bei dieser Temperatur das Strahlungsmaximum des "schwarzen Strahlers"?

- Die Temperatur an der Sonnenoberfläche beträgt etwa 5800 K . Bei welcher Farbe liegt das Maximum des Sonnenlichts?

Aufgaben zum plancksche Strahlungsgesetz

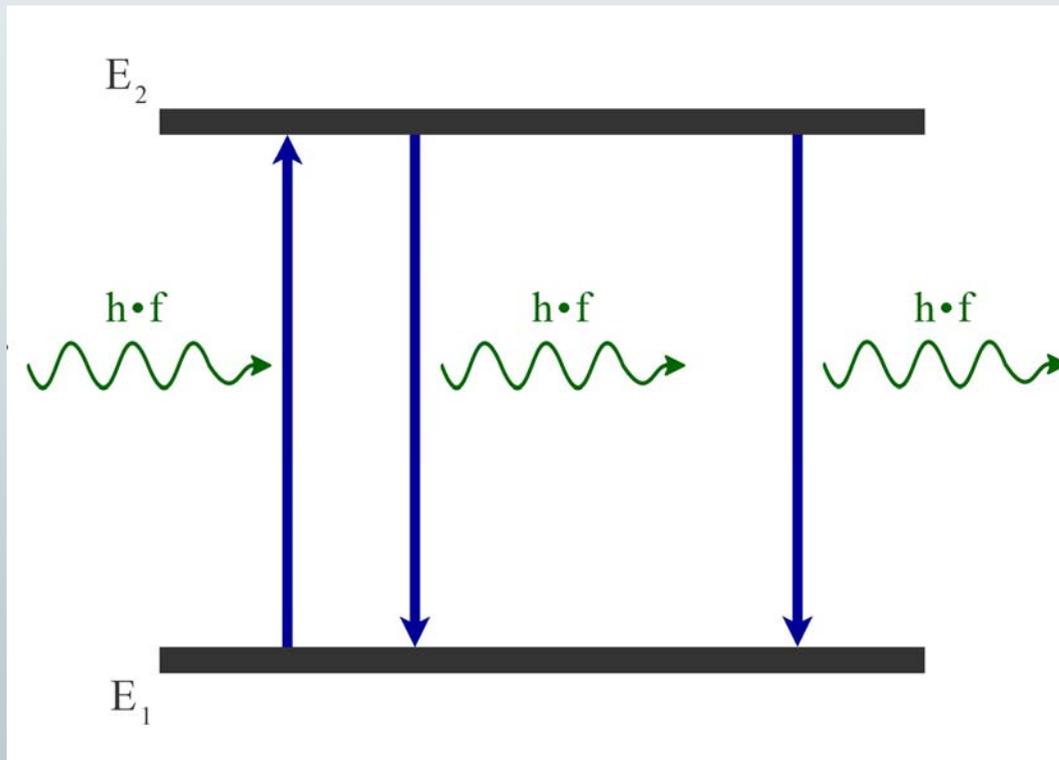
- Die durchschnittliche Hauttemperatur des Menschen liegt bei ca. 33°C. Bei welcher Wellenlänge liegt bei dieser Temperatur das Strahlungsmaximum des "schwarzen Strahlers"?
 $\lambda = 9,5\mu\text{m}$

- Die Temperatur an der Sonnenoberfläche beträgt etwa 5700 K. Bei welcher Farbe liegt das Maximum des Sonnenlichts?

$$\lambda = \frac{2,898 \text{ mm} \cdot \text{K}}{5700 \text{ K}} = 508,4 \cdot 10^{-9} \text{ m} \approx 508 \text{ nm}$$

Herleitung der Planckschen Strahlungsformel (nach Einstein)

- Absorption - Emission - spontane Emission - induzierte Emission



- N Atome: N_1 auf E_1 und N_2 auf E_2

Das plancksche Strahlungsgesetz

- N Atome: N_1 auf E_1 und N_2 auf E_2
- Zahl der Absorption ist proportional zur Zahl der Oszillationen in E_1 und der Strahlungsdichte $u(f)$

$$dN_1 = B_{12} \cdot u(f) \cdot N_1 \cdot dt$$



Einsteinkoeff. (Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit und Strahldichteinheit)

$$dN_2 = A_{21} \cdot N_2 \cdot dt + B_{21} \cdot u(f) \cdot N_2 \cdot dt$$

- Im thermischen Gleichgewicht: $dN_1 = dN_2$

$$B_{12} \cdot u(f) \cdot N_1 \cdot dt = [A_{21} + B_{21} \cdot u(f)] \cdot N_2 \cdot dt$$

Das plancksche Strahlungsgesetz

- mit Boltzmann-Statistik für Besetzungswahrscheinlichkeit zweier Energieniveaus:

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{\frac{-h \cdot f}{k \cdot T}}$$

Das plancksche Strahlungsgesetz

$$B_{12} \cdot u(f) \cdot e^{\frac{h \cdot f}{k \cdot T}} \cdot N_2 = [A_{21} + B_{21} \cdot u(f)] \cdot N_2$$

$$u(f) = \frac{A_{21}}{B_{12} \cdot e^{\frac{h \cdot f}{k \cdot T}} - B_{21}}$$

$$\text{für } T \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad B_{12} = B_{21}$$

$$\Rightarrow \quad u(f) = \frac{A_{21}}{B_{21} \cdot \left(e^{\frac{h \cdot f}{k \cdot T}} - 1 \right)}$$

Das plancksche Strahlungsgesetz

- B_{21} und A_{21} aus experimentell bestätigtem Rayleigh-Jeans-Gesetz

(für $h \cdot f \ll k \cdot T$)

$$u(f) = \frac{8\pi \cdot h \cdot f^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h \cdot f}{k \cdot T}} - 1}$$

(Spektrale Energiedichte im Frequenzintervall df und die Frequenz f)

Das plancksche Strahlungsgesetz

- Spektrale Energiedichte in den Raumwinkel $d\Omega$:

$$dj_{E,f} = u(f) \cdot c_0 \cdot \frac{d\Omega}{4\pi}$$

grafik

$$\frac{4\pi \cdot r^2}{r^2} = 4\pi$$

Das plancksche Strahlungsgesetz

- Spektrale Energiedichte pro Raumwinkelement

$$S_f = \frac{dj}{d\Omega} = \frac{c_0}{4\pi} \cdot u(f)$$

- Plancksches Strahlungsgesetz:

$$S_f = \frac{2f^{3 \cdot h}}{c_0^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h \cdot f}{k \cdot T}} - 1}$$

„Energie, die im Frequenzbereich df um f pro Zeit und Fläche in ein Raumelement $d\Omega$ bestrahlt wird.“