

# Der Potentialtopf als Illustration des quantenmechanischen Eigenschaftsbegriffs

Roland Berger, Rainer Müller und Hartmut Wiesner

## 1 Einleitung

In einem vorangegangenen Artikel [1] wurde dargelegt, daß ein wesentlicher Unterschied zwischen klassischer und Quantenphysik darin besteht, daß Quantenobjekte bestimmte, klassisch wohldefinierte Eigenschaften *nicht* besitzen. Ein Beispiel, bei dem dies sehr eindrücklich sichtbar wird, ist der Doppelspalt-Versuch, bei dem Elektronen auf einen Schirm treffen, nachdem sie eine Doppelspalt-Anordnung passiert haben. Man kann bei diesem Experiment den Elektronen in der Spaltebene *nicht* die Eigenschaft „Ort“ zuordnen. Denn wäre das so, müßte sich das gleiche Resultat ergeben, wenn man zuerst die Schirmfigur für Spalt 2 sich aufbauen läßt, indem man den anderen Spalt verschließt und anschließend analog den Beitrag von Spalt 1 zur Schirmfigur erzeugt. Bekanntlich ist das Ergebnis aber qualitativ von dem verschieden, was man erhält, wenn beide Spalte geöffnet sind: Statt der Interferenzfigur erhält man lediglich eine Überlagerung der beiden Einzelspaltmuster. Die Auffassung, daß ein Elektron durch genau einen der beiden Spalte geht, ist nicht aufrechtzuerhalten.

Als formales Kriterium, mit dem man entscheiden kann, ob ein Quantensystem eine dynamische Eigenschaft  $A$  (wie z. B. Ort, Impuls, kinetische Energie, Drehimpuls) besitzt, wurde in [1] die *Eigenwertgleichung* für  $A$  angegeben:

$$\hat{A}\psi = a_0\psi, \tag{1}$$

wobei  $\hat{A}$  der der Eigenschaft  $A$  zugeordnete Operator und  $a_0$  eine reelle Zahl ist. Erfüllt die Wellenfunktion  $\psi$  des Systems diese Gleichung, d. h. ergibt die Anwendung von  $\hat{A}$  auf  $\psi$  (linke Seite von (1)) eine Funktion, die wieder proportional zu  $\psi$  ist (rechte Seite von (1)), so *besitzt* das Quantensystem die Eigenschaft  $A$ . Der Wert von  $A$  ist dann durch die Proportionalitätskonstante  $a_0$  gegeben. Jede Messung der Eigenschaft  $A$  ergibt in diesem Fall den Wert  $a_0$ . Ist die Eigenwertgleichung (1) dagegen nicht erfüllt, besitzt das Quantensystem die Eigenschaft  $A$  *nicht*. In diesem Fall streuen die Meßwerte von  $A$ .

In [1] wurden die prinzipiellen Aspekte des quantenmechanischen Zustandsbegriffes erörtert. In Ergänzung dazu soll in der vorliegenden Arbeit und in einem Folgebeitrag an zwei konkreten Systemen nochmals verdeutlicht werden, daß Quantenobjekten im allgemeinen kein bestimmter Wert aller dynamischen Eigenschaften zugeschrieben werden kann. Wir wählen dazu den unendlich tiefen, linearen Potentialtopf (dieser Aufsatz) und das Wasserstoffatom (Folgebeitrag), da dies die beiden im Schulunterricht zentralen Quantensysteme sind.

## 2 Impulsverteilung beim Potentialtopf

Der Potentialtopf ist inzwischen in der Schule *das* Standardbeispiel für quantisierte Zustände. Man betrachtet Elektronen zwischen zwei unendlich hohen Wänden bei  $x = 0$  und  $x = L$ . Um die Schrödingergleichung und die Lösungsprozedur in der Schule zu vermeiden, werden Elementarisierungen wie z. B. die folgende vorgeschlagen:

Ein Elektron soll sich nach Abbildung ... mit gleichbleibendem Geschwindigkeitsbetrag  $v$  längs der  $x$ -Achse zwischen zwei reflektierenden Wänden mit dem Abstand  $a$  hin- und herbewegen.

Zunächst ist zu sagen, daß die hier benutzte klassische Analogie Vorstellungen hervorruft, die in der Quantenphysik unerwünscht sind. Eine Veranschaulichung durch hin- und herlaufende klassische Teilchen wird dem Charakter der quantenmechanischen Zustände, die ja stationäre Zustände mit zeitlich konstanter Wahrscheinlichkeitsverteilung sind, sicherlich nicht gerecht.

Eine in Schulbüchern beliebte Variante dieser „Herleitung“ besteht darin, zunächst die den Randbedingungen  $\psi(0) = \psi(L) = 0$  genügenden Wellenlängen  $\lambda_n = 2L/n$  einer stehenden Welle zu ermitteln. Mit Hilfe der de-Broglie-Relation  $p = h/\lambda$  werden dann die „möglichen Impulswerte“  $p_n = \pm nh/(2L)$  konstruiert, aus denen sich die korrekten Werte der Energie,  $E_n = p_n^2/(2m) = h^2 n^2/(8mL^2)$  ergeben.

Es ist die Frage zu stellen, ob es quantentheoretisch überhaupt haltbar ist, daß ein Elektron im Potentialtopf die Eigenschaft „Impuls“ besitzt. Oder kann man die gebundenen Zustände zur Energie  $E_n$  als Überlagerung der beiden Impulszustände  $p_{n1} = \frac{nh}{2L}$  und  $p_{n2} = -\frac{nh}{2L}$  auffassen?

Beantworten wir zunächst die letzte Frage. Wie schon oben dargestellt, ist  $\psi_p \sim \exp(ipx/\hbar)$  ein Zustand, in dem das Elektron die Eigenschaft „Impuls  $p$ “ besitzt. Überlagert man die beiden Impulszustände  $\psi_{n1}$  und  $\psi_{n2}$  erhält man den Superpositionszustand  $\psi_{n1} - \psi_{n2} \sim \sin(p_n x/\hbar)$ . Führen wir an den Teilchen in diesem Zustand Impulsmessungen aus, finden wir genau die beiden Werte  $p_{n1}$  und  $p_{n2}$  mit der jeweiligen Wahrscheinlichkeit  $1/2$ . Allerdings handelt es sich dabei keinesfalls um einen gebundenen Zustand für ein Teilchen im Potentialtopf, sondern um einen unendlich ausgedehnten stationären Zustand, der ein freies Teilchen beschreibt. Die beim Potentialtopf zu erfüllende Bedingung, daß die Aufenthaltswahrscheinlichkeit außen Null sein muß, wird von der Überlagerung der beiden Impulszustände nicht erfüllt. Es ist also nicht erlaubt, sich die stationären Zustände im Potentialtopf als eine solche Superposition von zwei Zuständen mit bestimmtem Impuls vorzustellen. Die detaillierte Analyse des Impulsspektrums wird noch deutlicher zeigen, daß dies keine leere Spitzfindigkeit ist, sondern einen experimentell zugänglichen physikalischen Hintergrund besitzt.

Wie kann man ermitteln, welche Impulse man in einem der Energie-Eigenzustände

$$\psi_n = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) & \text{für } 0 \leq x \leq L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2)$$

des Potentialtopfs mißt? Experimentell würde man eine Serie von Impulsmessungen an einem Ensemble von Elektronen in diesem Zustand durchführen. Die relativen Häufigkeiten der gefundenen Impulswerte trägt man in ein Diagramm ein. Die so gefundene Kurve nennt man das Impulsspektrum. Wird nur ein einziger Impulswert gefunden, besteht das Impulsspektrum aus einer einzigen scharfen Linie. Genau dann hat das Teilchen eine Impulseigenschaft. Streuen die Meßwerte dagegen, erhält man eine mehr oder weniger breite Kurve, die die Verteilung der gefundenen Impulse widerspiegelt.

Das Spektrum der Impulsmeßwerte in einem bestimmten Zustand  $\psi_n$  kann man nach den Regeln der Quantenmechanik auch theoretisch vorhersagen. Dazu muß man die Gestalt der Impuls-Eigenfunktionen  $\phi_{p_0}$  kennen (also der Funktionen, die die Eigenwertgleichung für den Impuls erfüllen, vgl. Gl. (1) in [1]). Sie sind durch

$$\phi_{p_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ip_0 x} \quad (3)$$

gegeben. Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Impulswert  $p_0$  zu finden, berechnet man das Skalarprodukt

$$\langle \phi_{p_0} | \psi_n \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{p_0}^*(x) \psi_n(x) dx \quad (4)$$

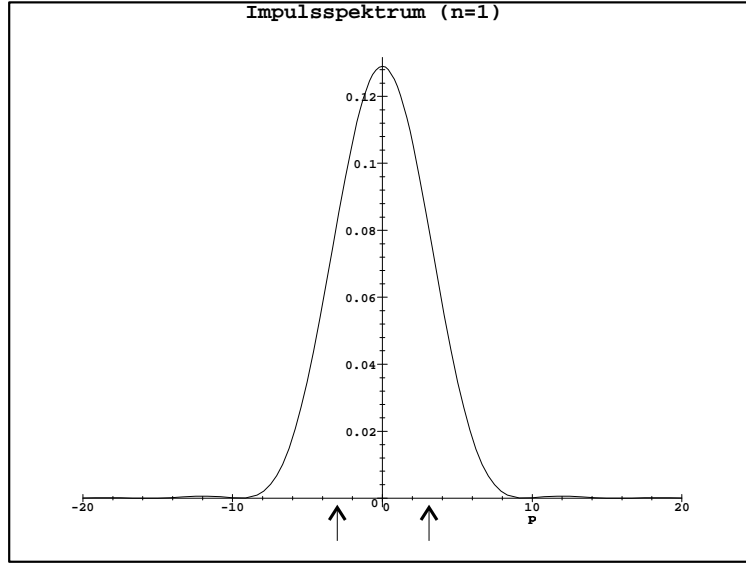


Abbildung 1: Impulsspektrum im Potentialtopf-Grundzustand ( $n = 1$ ). Impulse sind in Einheiten von  $\hbar/L$  aufgetragen.

des betrachteten Zustands  $\psi_n$  mit der zu  $p_0$  gehörigen Impuls-Eigenfunktion (vgl. Gl. (2) in [1]).

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit (d. h. die relative Häufigkeit), einen Impuls in einem kleinen Intervall  $dp$  um den Wert  $p_0$  herum zu finden, ist dann durch das Betragsquadrat des Skalarproduktes gegeben:

$$w(p_0)dp = |\langle \phi_{p_0} | \psi_n \rangle|^2 dp \quad (5)$$

Da die Impulseigenfunktionen proportional zu  $e^{ip_0x}$  sind, besitzt das in (5) auszuwertende Integral die Gestalt einer Fouriertransformation der Wellenfunktion. Wichtig ist dabei, daß sich die Integration effektiv nur über einen Bereich zwischen 0 und  $L$  erstreckt, da die Wellenfunktion  $\psi_n$  außerhalb des Potentialtopfs verschwindet.

Das Integral läßt sich analytisch berechnen, und man findet die Wahrscheinlichkeitsverteilung (wir geben die Rechnungen in diesem Aufsatz nur in komprimierter Form wieder; für eine ausführliche Version verweisen wir auf unsere WWW-Seite im Internet [2]; für das vorliegende Beispiel s. auch [3], Gl. (35) oder [4]):

$$w(p)dp = \frac{\frac{4Ln^2}{\hbar\pi^3} dp}{\left(\left(\frac{p}{p_1}\right)^2 - n^2\right)^2} \cdot \begin{cases} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{p}{p_1}\right) & \text{für } n = 2, 4, 6, \dots \\ \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{p}{p_1}\right) & \text{für } n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (6)$$

In den Abbildungen 1, 2, und 3 sind die Impulsspektren für  $n = 1$ ,  $n = 5$  und  $n = 100$  gezeigt. Aufgetragen ist der Impuls in Einheiten von  $\hbar/L$ . Schon auf den ersten Blick fällt auf, daß es sich um ein kontinuierliches Spektrum von Impulswerten handelt. Diese Tatsache ist auch schon ohne Rechnung einsichtig, denn die Wellenfunktion ist eine nichtperiodische Funktion (denn sie ist außerhalb des Potentialtopfs identisch Null). Als solche besitzt sie aber ein kontinuierliches Fourierspektrum, was nach dem oben Gesagten direkt zu einer kontinuierlichen Impulsverteilung führt.

Bei Impulsmessungen werden fast alle Werte gefunden, nicht nur die nach klassischer Vorstellung erlaubten Werte  $p = \pm n\hbar\pi/L$  (in den Abbildungen durch einen Pfeil markiert). Im Grundzustand  $n = 1$  wird sogar am häufigsten der Wert  $p = 0$  gefunden! Bemerkenswert ist,

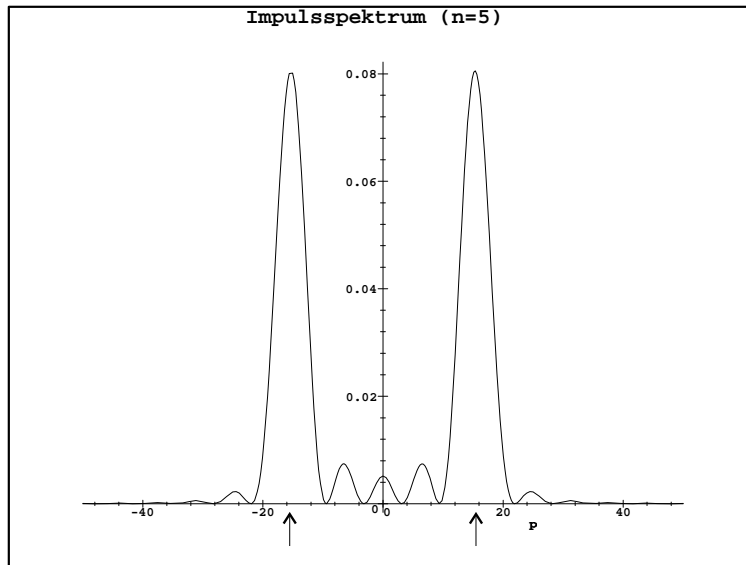


Abbildung 2: Impulsspektrum im Potentialtopf für den Zustand  $n = 5$ .

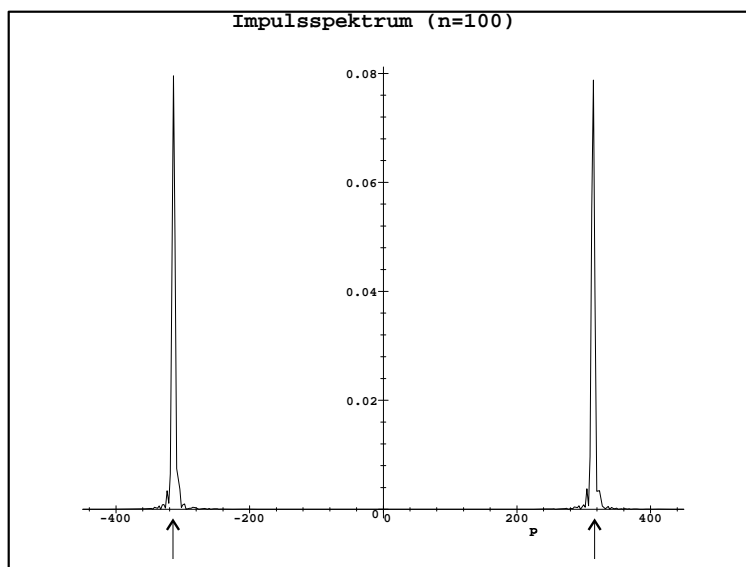


Abbildung 3: Impulsspektrum im Potentialtopf für den Zustand  $n = 100$ .

daß keinesfalls immer  $E_n = p^2/(2m)$  gilt. Mit nennenswerter Wahrscheinlichkeit findet man sogar Meßwerte von  $p$ , für die  $\frac{p^2}{2m} > E_n$  ist! (Dies entspricht den Impulsen außerhalb des durch die Pfeile markierten Intervalls). Und das, obwohl die Messung der (Gesamt-) Energie immer genau den Wert  $E = E_n$  liefert.

Für große Werte von  $n$  werden die relativen Breiten des Spektrums der  $p$ -Werte um  $p_n = \pm n\hbar\pi/L$  immer kleiner. In Übereinstimmung mit dem Korrespondenzprinzip nähert sich das Spektrum den klassisch zu erwartenden Ergebnissen an, wonach das Teilchen gerade die beiden Impulse  $p_n = \pm n\hbar\pi/L$  besitzen kann. Diese Feststellung gilt jedoch nur für die relativen Breiten. Vergleicht man die Skalierung der  $p$ -Achsen in den verschiedenen Abbildungen, sieht man, daß die absolute Streuung der Impulswerte immer noch beträchtlich ist.

Kommen wir noch einmal auf die eingangs gestellte Frage zurück, ob man die Zustände der Elektronen im Potentialtopf durch ein Modell hin- und herlaufender Teilchen beschreiben kann. Die vorangegangene Argumentation und insbesondere die Berechnung des Impulsspektrums sollte hinreichend gezeigt haben, daß dies nicht möglich ist. Aber selbst die (unendlich ausgedehnte) Superposition zweier gegenläufiger Impulseigenfunktionen

$$\psi(x) \sim e^{ipx} + e^{-ipx} \sim \sin(px/\hbar)$$

darf man sich nicht durch hin- und herlaufende Teilchen veranschaulichen. Im Gegenteil: An ihr läßt sich eindrücklich demonstrieren, daß diese klassische Denkweise unmittelbar zu Widersprüchen mit quantenmechanischen Ergebnissen führt. Die Wahrscheinlichkeitsdichte, ein Teilchen am Ort  $x$  zu finden, ist durch  $|\psi(x)|$  gegeben. Sie wird in periodischen Abständen (nämlich an den Nullstellen des Sinus) exakt Null! Dies ist im klassischen Modell völlig unerklärlich. Wie können sich die Teilchen über diese Stellen hinwegbewegen, ohne jemals dort gefunden zu werden? Hier führen die klassischen Vorstellungen unmittelbar zu vermeidbaren Verständnisproblemen. Hält man sich an die korrekte quantenmechanische Interpretation, stellt die Superposition zweier Impulszustände ein schönes Beispiel für ein Quantensystem dar, das die Eigenschaft „Impuls“ gerade nicht besitzt, im Widerspruch zu allen klassischen Vorstellungen.

### 3 Verteilung der kinetischen Energie beim Potentialtopf

In Übereinstimmung mit der – wie eben dargelegt falschen – Aussage, daß die Teilchen im Potentialtopf die Impulswerte  $p_n = \pm n\hbar/L$  haben, wird in den Schulbüchern und in der didaktischen Literatur fast immer behauptet, daß die diskreten Werte der Gesamtenergie,  $E_n = \hbar^2\pi^2n^2/(2mL^2)$ , als Werte der kinetischen Energie aufzufassen seien. Darauf beruhen ja gerade die Elementarisierungen über die Analogie mit der eingespannten Saite oder der oben angesprochene klassische Zugang des hin- und herlaufenden Teilchens. Da das Argument, daß die potentielle Energie innerhalb des Potentialtopfs ja Null sei, auf den ersten Blick recht plausibel wirkt, ist es um so überraschender, daß diese Auffassung quantenmechanisch nicht zu halten ist. Wenn diese Behauptung richtig wäre, dann dürfte das Spektrum der möglichen Meßwerte für  $E_{\text{kin}}$  nur aus den Werten  $E_n = \hbar^2\pi^2n^2/(2mL^2)$  bestehen. Daß dies nicht der Fall ist, zeigt die folgende Berechnung des Spektrums der kinetischen Energie.

Das  $E_{\text{kin}}$ -Spektrum läßt sich analog wie das Impulsspektrum berechnen, indem man die Eigenfunktionen  $\phi_{E_{\text{kin}}}$  der kinetischen Energie bestimmt und wie in Gleichung (5) das Skalarprodukt mit der Zustandsfunktion  $\psi$  bildet. Dies wird dadurch erleichtert, daß sich die Eigenfunktionen von Impuls und kinetischer Energie nur um eine Normierungskonstante unterscheiden (s. Kasten 1).

Das  $E_{\text{kin}}$ -Spektrum läßt sich auch über das Impulsspektrum ermitteln. Da die Operatoren  $\hat{p}$  und  $\hat{p}^2/(2m)$  vertauschen, ist der Zusammenhang zwischen Impuls- und  $E_{\text{kin}}$ -Spektrum der

### Kasten 1: Eigenfunktionen der kinetischen Energie

Die Eigenfunktionen des Impulses sind die ebenen Wellen (3)

$$\phi_p = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}.$$

Als eine Basis im Hilbertraum sind sie vollständig und folgendermaßen normiert:

$$\langle \phi_{p_1} | \phi_{p_2} \rangle = \delta(p_1 - p_2).$$

Weil die Operatoren von Impuls und kinetischer Energie miteinander vertauschbar sind, sind diese Funktionen auch gleichzeitig Eigenfunktionen der kinetischen Energie (vgl. [1]). Drückt man  $p$  durch die zugehörigen Werte von  $E_{\text{kin}}$  aus, erhält man die Funktionen

$$\phi_{E_{\text{kin}}}^{(1)} = C \exp\left(i\sqrt{2mE_{\text{kin}}}x/\hbar\right), \quad \phi_{E_{\text{kin}}}^{(2)} = C \exp\left(-i\sqrt{2mE_{\text{kin}}}x/\hbar\right).$$

(Weil es zu jedem Impuls zwei Werte von  $E_{\text{kin}}$  gibt, sind die Eigenfunktionen bezüglich  $E_{\text{kin}}$  entartet, und man braucht zur Unterscheidung noch eine zweite Quantenzahl).

Der eigentliche Unterschied zwischen den Eigenfunktionen von Impuls und kinetischer Energie liegt in der Normierungsbedingung. Für letztere muß gelten (mit  $\sigma = 1, 2$ ):

$$\langle \phi_{E_{\text{kin}1}}^{(\sigma)} | \phi_{E_{\text{kin}2}}^{(\sigma')} \rangle = \delta_{\sigma\sigma'} \delta(E_{\text{kin}1} - E_{\text{kin}2}).$$

Die explizite Berechnung des Normierungsintegrals liefert für die Konstante  $C$  den Wert

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(\frac{m}{2E_{\text{kin}}}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Um das Normierungsintegral auszuwerten, muß man die folgende Transformationsformel für die  $\delta$ -Funktion anwenden [5], S. 422):

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0),$$

wobei  $x_0$  die Nullstelle von  $f(x)$  bedeutet.

gleiche wie in der klassischen Statistik, und man kann die klassische Transformationsformel für Wahrscheinlichkeitsverteilungen anwenden:

$$w(E_{\text{kin}})dE_{\text{kin}} = 2w(p_0)dp, \quad (7)$$

Dabei ist  $w(p_0)$  die oben angegebene Verteilungsfunktion für die Impulse, ausgewertet an der Stelle  $p_0 = \sqrt{2mE_{\text{kin}}}$ . Der Faktor 2 stammt daher, daß zu jedem Wert der kinetischen Energie zwei Impulswerte  $p = \pm\sqrt{2mE_{\text{kin}}}$  zu berücksichtigen sind. Es ergibt sich damit

$$w(E_{\text{kin}}) = 2w(p_0) \left| \frac{dp}{dE_{\text{kin}}} \right| = 2 \frac{m}{\sqrt{2mE_{\text{kin}}}} w(p_0). \quad (8)$$

In Abb. 4, 5 und 6 sind die Spektren der kinetischen Energie für die Potentialtopf-Zustände mit  $n = 1$  (Grundzustand),  $n = 5$  und  $n = 100$  gezeigt. Aufgetragen ist die kinetische Energie in Einheiten von  $\hbar^2/(mL^2)$ . Man sieht, daß die kinetische Energie keinesfalls nur die Werte

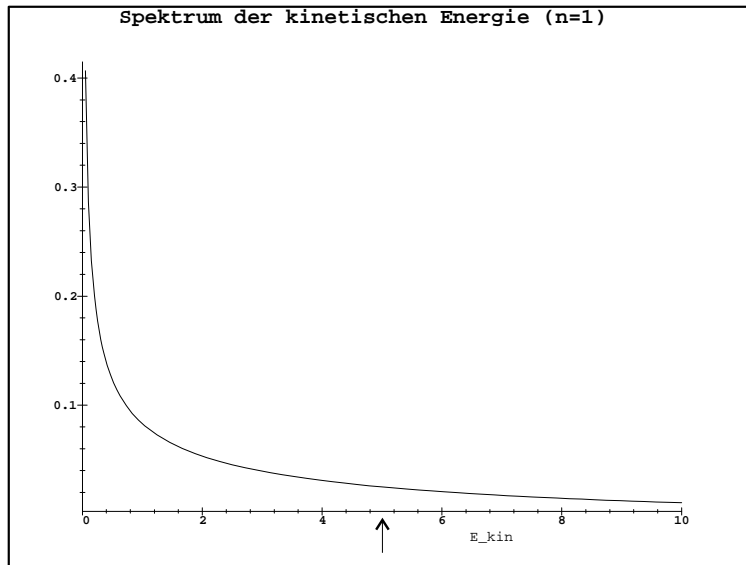


Abbildung 4: Spektrum der kinetischen Energie im Grundzustand des Potentialtopfs ( $n = 1$ ). Energien sind in Einheiten von  $\hbar^2/(mL^2)$  aufgetragen.

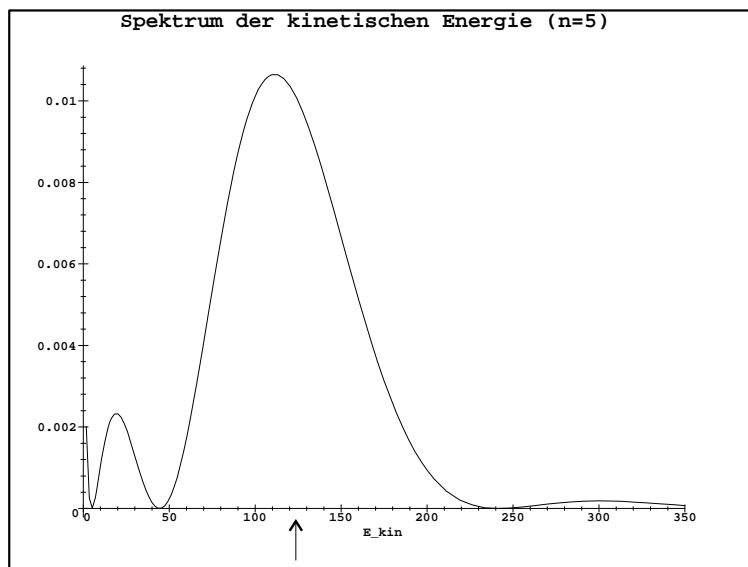


Abbildung 5: Spektrum der kinetischen Energie für den Potentialtopf-Zustand  $n = 5$ .

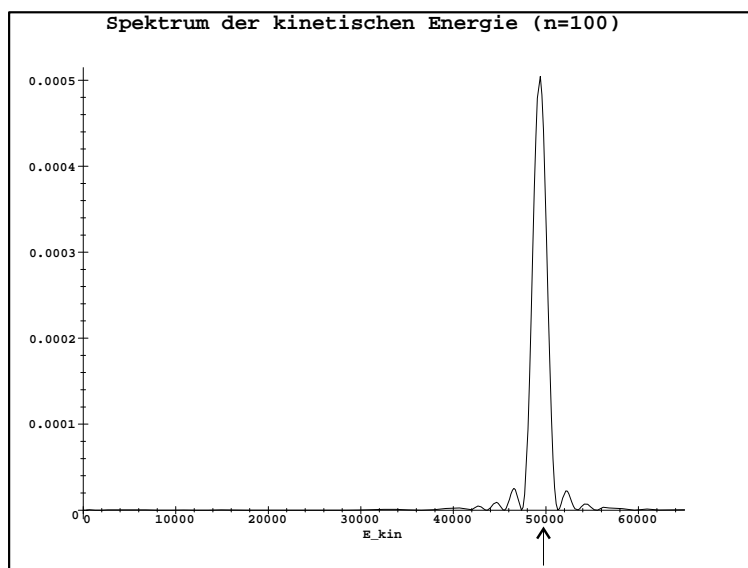


Abbildung 6: Spektrum der kinetischen Energie für den Potentialtopf-Zustand  $n = 100$ .

$E_n = \hbar^2 \pi^2 n^2 / (2mL^2)$  (Pfeile) annehmen kann, sondern im Gegenteil ein kontinuierliches Spektrum besitzt. Das bedeutet insbesondere, daß die für den Potentialtopf berechneten Energieeigenwerte keinesfalls die kinetischen Energien sein können, sondern die unter Berücksichtigung des Potentials berechneten Gesamtenergien sind.

Als Konsequenz ergibt sich, daß der in einigen Lehrgängen vorgeschlagene Weg vom Potentialtopf zum Wasserstoffatom (vgl. die Übersicht in [6]) prinzipiell falsch ist. Bei diesem Vorgehen wird die kinetische Energie des Elektrons im Atom durch die (Gesamt!)Energie in einem dreidimensionalen Potentialtopf abgeschätzt. *Zusätzlich* wird dem Elektron eine potentielle Coulombenergie zugeschrieben. Daß bei einem solchen Vorgehen die Übereinstimmung mit dem korrekten Resultat nur zufällig sein kann, sollte nach dem bisher Gesagten klar sein.

Der Sachverhalt, daß kinetische Energie und Gesamtenergie nicht gleichzeitig feste Werte besitzen können, läßt sich auch etwas formaler unmittelbar aus den Gesetzen der Quantenmechanik ableiten: Wie in [1] gezeigt, besitzen Operatoren, die nicht vertauschbar sind, kein gemeinsames System von Eigenfunktionen. Das heißt, die Eigenwertgleichung kann nicht für beide Operatoren gleichzeitig erfüllt sein und damit ist es nicht möglich, daß das Quantenobjekt beide Eigenschaften besitzt.

Genau ein solcher Fall ist aber bei kinetischer, potentieller und Gesamtenergie gegeben: Der Operator der kinetischen Energie ist  $\hat{p}^2/(2m)$ , also eine Funktion des Impulsoperators. Dagegen ist  $\hat{V}(\hat{x})$ , der Operator der potentiellen Energie, im allgemeinen eine Funktion des Ortsoperators. Als Funktionen nichtvertauschbarer Operatoren sind daher die Operatoren von kinetischer und potentieller Energie nicht miteinander vertauschbar.

Der Operator der Gesamtenergie ist  $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m) + \hat{V}(\hat{x})$ . Er ist eine Funktion sowohl des Orts- als auch des Impulsoperators. Das bedeutet, daß er weder mit dem Operator der kinetischen Energie noch mit dem der potentiellen Energie vertauschbar ist. Nach dem obigen Kriterium gibt es daher keinen Zustand für ein Quantenobjekt, der gleichzeitige Eigenfunktion von kinetischer, potentieller und Gesamtenergie oder auch nur von zweien dieser drei Energien ist. Ein Quantenobjekt kann daher niemals gleichzeitig die Eigenschaften „kinetische Energie“ und „Gesamtenergie“ besitzen; ebensowenig „potentielle Energie“ und „Gesamtenergie“. Auch „kinetische Energie“ und „potentielle Energie“ können nicht gleichzeitige Eigenschaften von



Quantenobjekten sein.

Diese Feststellung gilt ganz allgemein, unabhängig von der Natur der Quantenobjekte, sofern nur das Potential vom Ort abhängig ist. Beim Potentialtopf ist das Potential im Innern dagegen konstant, d. h. keine Funktion von  $\hat{x}$ . Die Vermutung liegt nahe, daß dann  $\hat{H}$  und  $\hat{V}$  vertauschbar sind. Hier zeigt sich die Wichtigkeit, das Problem vollständig zu behandeln. Der Sprung des Potentials am Rand des Potentialtopfs (der dazu führt, daß das Potential eben doch vom Ort abhängt) ist dafür verantwortlich, daß  $\hat{H}$  und  $\hat{V}$  nicht gleichzeitig bestimmte Werte haben können – wie es die (von dieser Argumentation unabhängige) Rechnung oben zeigt.

Ein ähnlicher Einwand betrifft die Eigenfunktionen der Gesamtenergie, die im Innern des Potentialtopfs proportional zu  $\sin(\pi n/L \cdot x)$  sind. Auf den ersten Blick scheint es, als ob sie gleichermaßen Eigenfunktionen der kinetischen Energie darstellen, denn beim zweimaligen Differenzieren wird die Sinusfunktion reproduziert. Dies stünde im Widerspruch zur obigen Aussage, nach der es keine gemeinsamen Eigenfunktionen von kinetischer und Gesamtenergie geben kann. Die genauere Analyse zeigt aber, wo der Fehler in dieser Argumentation liegt: Auch hier ist der Übergang am Rand des Potentialtopfs nicht beachtet worden, wo es bei den Differentiationen zu Unendlichkeiten kommt, die verhindern, daß die betrachteten Funktionen die Eigenwertgleichung der kinetischen Energie erfüllen.

## Literatur

- [1] R. Müller, R. Berger, H. Wiesner, *Didaktische Aspekte des quantenmechanischen Zustandsbegriffs*, Physik in der Schule ..., ... (1997).
- [2] Homepage des Lehrstuhls für Didaktik für Physik an der Universität Muenchen: <http://www.physik.uni-muenchen.de/sektion/didaktik>
- [3] R. W: Robinett, *Quantum and classical probability distributions for position and momentum*, Am. J. Phys. **63**, 826 (1995).
- [4] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik Bd. III: Quantenmechanik*, Akademie-Verlag, Berlin 1988, S. 63.
- [5] A. Messiah, *Quantenmechanik Band 1*, de Gruyter, Berlin, 1976.
- [6] R. Müller, H. Wiesner, *Stabilität und Spektrum der Atome*, Physik in der Schule **34**, 48 (1996).

## Adressen der Autoren

Lehrstuhl für Didaktik der Physik,  
Sektion Physik der Universität München, Schellingstr. 4, 80799 München.